インフレーション宇宙におけるスカラー場のダイナミックス(基研長期研究会「進化の力学への場の理論的アプローチ」報告,研究会報告)

佐々木; 南部; 中尾

インフレーション宇宙におけるスカラー場のダイナミックス

広大理論研　佐々木、南部、中尾

1. introduction

インフレーション模型は、標準宇宙論に於ける沢山の問題を解決すると考えられている。このモデルにおいてはスカラー場が重要な役割を果たし、その性質によってインフレーションの持続時間や宇宙のエントロピー生成や密度ゆらぎの大きさなどが決まる。スカラー場のダイナミックスは第０近似としては古典場とみなして運動方程式を解くことによって調べられる。それによればある時期にスカラー場のポテンシャルエネルギーが支配的になり宇宙はdeSitter膨張を開始する。その時スカラー場はゆっくりとポテンシャルを転がり落ちていく。このような古典的な描像がどの程度正しいかは量子場としてのダイナミックスをきちんと調べなければわからない。

量子論としてインフレーション模型をとらえるときに起こるもう１つの問題はいつ量子的なゆらぎが古典的なゆらぎに転化するかである。１つの考え方として不確定関係 $\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \hbar$ において $\hbar$ が無視できることであるとみなせば、これはゆらぎのスケールがhorizonを越えるという条件に対応する。しかしながらこの条件は力学変数として何を取るかによって変わってしまい、あまり都合がよくない。

以上の問題を取り扱うためにここでは量子場をそのまま解くのではなく、インフレーションを支配する長波長モード（$\ell > H^{-1}$）に対する確率微分方程式（ランジェバン方程式）を導きそれを調べる。

2. formulation

バックグランドとしてはdeSitter時空を仮定し、その上で自己相互作用するスカラー場を考える。

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\vec{x}^2 \quad ; \; a = e^{Ht}, \; H \approx \text{const.} \qquad (1)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{1}{a^2}\vec{\nabla}^2\phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \qquad (2)$$

ここで ϕ はHeisenberg演算子である。ϕ を長波長と短波長のモード

に分解する。

$$\phi = \varphi + \sqrt{\hbar}\,\varphi_s$$
$$\dot{\phi} = v + \sqrt{\hbar}\,v_s \qquad (3)$$

$$\varphi_s = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\,\theta(k-\epsilon aH)\,\phi_{\vec{k}}(t)\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$
$$v_s = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\,\theta(k-\epsilon aH)\,\dot{\phi}_{\vec{k}}(t)\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \qquad (\epsilon \ll 1) \qquad (4)$$
$$\phi_k(t) = \hat{a}_{\vec{k}}\,\varphi_{\vec{k}}(t) + \hat{a}^{+}_{-\vec{k}}\,\varphi^{*}_{\vec{k}}(t)$$

ただし$\varphi_{\vec{k}}$は次の方程式を満たす。

$$\ddot{\varphi}_{\vec{k}}(t) + 3H\dot{\varphi}_{\vec{k}}(t) + \left(\frac{k^2}{a^2} + M^2\right)\varphi_{\vec{k}} = 0\ , \quad M^2 = \langle V''(\varphi)\rangle$$
$$\varphi_{\vec{k}}(t)\,\dot{\varphi}^{*}_{\vec{k}}(t) - \varphi^{*}_{\vec{k}}(t)\,\dot{\varphi}_{\vec{k}}(t) = \frac{i}{a^3} \qquad (5)$$

短波長モードに対する長波長モードの相互作用は平均場近似の形で組み入れてある。（４）を（２）に代入することで長波長モード(φ, v)に対する量子的ランジェバン方程式が得られる。

$$\dot{\varphi} = v + \sqrt{\hbar}\,\sigma$$
$$\dot{v} = -3Hv + \frac{1}{a^2}\vec{\nabla}^2\varphi - V'(\varphi) + \sqrt{\hbar}\,\tau$$
$$\sigma = \epsilon a H^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\,\delta(k-\epsilon aH)\,\phi_{\vec{k}}(t)\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \qquad (6)$$
$$\tau = \epsilon a H^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\,\delta(k-\epsilon aH)\,\dot{\phi}_{\vec{k}}(t)\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

ｄｅＳｉｔｔｅｒ不変な真空を取りパラメータ ϵ として $\exp\left(\frac{-3H^2}{|M^2|}\right) \ll \epsilon \ll \frac{|M^2|}{3H^2}$ の範囲のものを選んでやれば　ノイズ(σ, τ)の非可換性が無視できて古典的ノイズに対する古典的なランジェバン方程式として扱うことが出来る。結局次の形のランジェバン方程式によってインフレーションのダイナミクスが記述されることになる。

$$\dot{\varphi} = v + \sqrt{\hbar}\,\sigma$$
$$\dot{v} = -3Hv + \frac{1}{a^2}\vec{\nabla}^2\varphi - V'(\varphi) - \frac{M^2}{3H}\sqrt{\hbar}\,\sigma \qquad (7)$$
$$\langle \sigma(x_1)\,\sigma(x_2)\rangle = \frac{H^3}{4\pi^2}\,j_0(\epsilon aH r_{12})\,\delta(t_1 - t_2)$$

３．ａｐｐｌｉｃａｔｉｏｎ

インフレーション宇宙におけるスカラー場の振舞いには大きく分けて３つの段階がある。インフレーション開始直後はスカラー場そのものの量子的ゆらぎが支配的であり系はＢｒｏｗｎ運動的な時間発展をし、ここでは古典的なインフレー

ションの描像は適用できない。少し時間がたってポテンシャルによる非線形力が効き始めると系は決定論的な振舞いを始め、これ以降は古典的な描像が使えると考えられる。最後のｒｅ－ｈｅａｔｉｎｇではまた量子的効果が重要な役割を果たす。

今回は１番目の時代のスカラー場のダイナミクスを(7)式を用いて調べてみた。この時代で興味があるのはインフレーション前の熱的なゆらぎがスカラー場のダイナミクスにどの様な影響を及ぼすかである。ここではモデルとしてニュー・インフレーションを想定して次の形のポテンシャルを考える。

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{4}\left(\varphi^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2 \quad ; \lambda \ll \frac{m^2}{m_{pl}^2} \ll 1 \tag{8}$$

(7)式を無次元の変数を使って書き換える。

$$\varphi = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}x \;, \quad v = \frac{m^3}{3\sqrt{\lambda}H}y \;, \quad t = \frac{3H}{m^2}u \;, \quad \vec{r} = \frac{3H}{m^2}\vec{z} \tag{9}$$

さらに簡単化のために空間方向の自由度を $L \lesssim (\epsilon H)^{-1}$ のスケールで平均化することで落としてやる。するとランジェバン方程式(7)はそれに等価なフォッカー・プランク方程式に書き換えることができる。

$$\frac{\partial W}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial x}(-yW) + \frac{\partial}{\partial y}\left[3\gamma\{y - x(1-x^2)\}W\right] + \alpha\left[\frac{\partial}{\partial x} + (1 - 3\langle x^2\rangle)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 W \quad ; \gamma = \frac{3H^2}{m^2} \;, \quad \alpha = \frac{3\lambda}{8\pi^2}\left(\frac{H^2}{m^2}\right)^2 \hbar \tag{10}$$

ここで W は相空間 (x, y) における確率分布関数である。インフレーション開始時においては $\langle\varphi^2\rangle \simeq T_c^2 \approx \frac{m^2}{\sqrt{\lambda}}$ であるから分布関数は $\langle x^2\rangle \simeq \lambda^{\frac{1}{2}} \ll 1$ の領域に留まっている。したがって(10)において非線形力の項を $-x(1-x^2) \approx -x$ のように近似し $\langle x^2\rangle$ の項を無視できる。この近似の下で(10)式は、

$$\frac{\partial W}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial x}(-yW) + \frac{\partial}{\partial y}\left[3\gamma(y - x)W\right] + \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 W \tag{11}$$

この方程式はＯｒｓｔｅｉｎ－Ｕｈｌｅｎｂｅｃｋ過程に対応し解析的に解ける。

デルタ関数の初期条件に対する解は、

$$W(x_i, u \mid x_i(0), 0) = (2\pi)^{-1}\left[\det \sigma(u)\right]^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} X_i(u)(\sigma^{-1})_{ij} X_j(u)\right]$$

$$X_i(u) = x_i - G_{ij}(u)\, x_j(0) \qquad (12)$$

$$x_1 = 2x - y\,, \quad x_2 = -x + y$$

G_{ij} はノイズをおとしたランジェバン方程式

$$\frac{d}{du} x_i = -\Gamma_{ij} x_j \quad , \quad \Gamma_{ij} = \begin{pmatrix} -2 & -4-3\gamma \\ 1 & 2+3\gamma \end{pmatrix} \qquad (13)$$

のグリーン関数であり

$$G_{ij}(u) = \left[\exp(-\Gamma u)\right]_{ij} \qquad (14)$$

分散を表わす行列 σ_{ij} は G_{ij} によってかけて

$$\sigma_{ij}(u) = 2 D_{kl} \int_0^u du'\, G_{ik}(u')\, G_{jl}(u') \quad ; \quad D_{ij} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (15)$$

よって σ_{ij} の時間発展は Γ_{ij} の固有値 $\lambda_\pm$ を用いて $\propto e^{-2\lambda_\pm u}$ となる。γ は1より十分大であるから、$\lambda_+ \sim 1+3\gamma$, $\lambda_- \sim -1$ 。したがって分散行列 σ_{ij} に対する正の固有値の寄与は時間 $u \sim 1/\gamma$（ハッブル時間）までに無視できるようになり、それ以降の形は

$$\sigma_{11} \sim \alpha\left(e^{2u} - \frac{4}{(3\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma} - 1\right) \qquad (16)$$

$$\sigma_{12} \sim -\alpha\left(\frac{1}{3\gamma}(e^{2u} - 1) - \frac{2}{(3\gamma)^2}\right)$$

$$\sigma_{22} \sim \alpha\left(\frac{1}{(3\gamma)^2} e^{2u} - \frac{1}{(3\gamma)^2}\right)$$

以上の事を相空間で見てみる。インフレーション前の状態として熱平衡を仮定すれば分散に対する初期条件は $\langle x \rangle = \langle y \rangle = 0$, $\langle x^2 \rangle \simeq \alpha^{\frac{1}{2}} \gamma^{-1}$, $\langle y^2 \rangle \approx \gamma$ 。ところが γ が非常に大きいためにy方向の分散は時間 $u \sim \frac{1}{\gamma}$ までにほぼ $\langle x^2 \rangle$ 程度まで小さくなる。その時Wの形は

$$W(x, y; u) \simeq \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\alpha^2 e^{2u}}{(3\gamma)^3}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(3\gamma)^3}{2\alpha}(x-y)^2 - \frac{x^2}{2\alpha e^{2u}}\right] \qquad (17)$$

$u \sim \frac{1}{\gamma}$ 以降は $y-x$ に垂直方向の分散は $\alpha/(3\gamma)^3$ であり、x方向の分散 αe^{2u} に比べて

非常に小さくなる。これは初期条件が完全に消去されて、ｓｌｏｗ－ｒｏｌｌｉｎｇ条件 $|\ddot{\phi}| \ll 3H|\dot{\phi}|$ が実現されることを表わしている。

４．まとめ

スカラー場の長波長モードに対する相空間でのランジェバン方程式を導き、それに対応するフォッカー・プランク方程式を解くことで、インフレーションの初期におけるスカラー場のダイナミクスを調べた。その結果　ハッブル時間内で初期の速度分散は消えてしまいｓｌｏｗ－ｒｏｌｌｉｎｇ条件が実現されることが確かめられた。

ポテンシャルによる非線形力が効き始めると系は決定論的な進化を始めるが宇宙全体を見たときにはゆらぎのために $\phi \sim 0$ 近傍に留まっているｈｏｒｉｚｏｎスケールの領域が必ず存在し、このような領域は $\phi \neq 0$ である領域に比べて膨張率が大きいために確率としてはゼロになることはない（インフレーションは終わらない）。よってインフレーションの持続時間などを考える場合にはこの様な体積の効果を考慮したフォッカー・プランク方程式を立ててそれを解いてやる必要がある。

reference.

1. M. Sasaki, Y. Nambu and K. Nakao, preprint RRK 87-22 (1987)
2. Y. Nambu and M. Sasaki, preprint RRK 87-31 (1987)
3. A. A. Starobinsky, in "Current Topics in Field Theory, Quantum Gravity and Strings", Lecture Note in Physics 246, ed. H.J. de Vega and N. Sanchez (Springer, Berlin, 1986) 107.
4. S-J. Rey, Nucl. Phys. B284 (1987) 706.
5. A.S. Goncharov, A.D. Linde and V.F. Mukhanov, Int. J. Mod. Phy. A2 (1987) 561
6. A. Vilenkin, preprint TUTP 87-13 (1987)